ТРУДЫ
ОБЩЕСТВА ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ
при ИМПЕРАТОРСКОМЪ Казанскомъ Университетѣ

Томъ XLIV, вып. 4.

А. Остроумовъ.

КЪ ВАРІАЦІОННОЙ СТАТИСТИКѢ
КАСПІЙСКИХЪ ДИДАКНИДЪ.

Zur Variationsstatistik der Kaspischen Didacniden.

Von

A. Ostroumoff.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1912.

Печатано по постановленію Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Президентъ Б. Полѣновъ.

Къ варіаціонной статистикѣ каспійскихъ дидакнидъ.

Въ предлагаемой работѣ даются результаты варіаціонно-статистическаго исчисленія данныхъ опубликованныхъ мною въ 1905 году („Поѣздка на Каспій“. Тр. Общ. Естеств. Т. XXXIX, вып. 6), относящихся къ Каспійскимъ дидакнидамъ. Тамъ были напечатаны таблицы измѣреній, составленныя проф. бар. Ф. Ф. Розеномъ, но онѣ не были подвергнуты математической обработкѣ соотвѣтственно современнымъ требованіямъ, за неимѣніемъ времени.

Истекшимъ лѣтомъ, будучи вынужденъ по болѣзни не покидать нѣкоторое время своего кабинета, я занялся такой обработкой таблицъ барона Розена и такимъ образомъ намѣренъ пополнить указанный пробѣлъ.

Въ свое время, опубликовывая таблицы, я считалъ это дѣло лежащимъ на моей нравственной отвѣтственности, что бы тщательный и кропотливый трудъ покойнаго профессора († 1902) по измѣренію раковинъ не оставался безслѣднымъ. Предлагаемая теперь обработка таблицъ, можно сказать, модернизируетъ результаты измѣреній и можно думать, что современемъ обратитъ на себя вниманіе и палеонтологовъ и конхиліологовъ, занимающихся изученіемъ лимнокардидъ. Я говорю „со временемъ“ потому что эта обработка пока стоитъ одиноко и какъ таковая не можетъ имѣть сколько нибудь широкаго значенія.

Изъ пяти измѣренныхъ групъ („Поѣздка на Каспій“ стр. 12) я нахожу возможнымъ подвергнуть математической обработкѣ лишь первыя три. Что касается четвертой группы, то здѣсь слѣдовало бы имѣть отдѣльныя измѣренія для M. edentula и M. caspia. Пятая группа (C. edule) при небольшемъ числѣ измѣренныхъ створокъ (120) включаетъ матеріалъ изъ различныхъ мѣстонахожденій, внѣ Каспія.

Первыя три группы относятся къ роду Didacna.

I. Группа Catillus (D. catillus, protracta, Barbot-de-Marni, longipes): тупой киль, задняя площадка отлогая, число реберъ на передней обыкновенно не бываетъ менѣе 16. Макушка не предпринята надъ замкомъ (445 створокъ).

II. Группа Trigonoides (D. trigonoides, pyramidata, trigonoides-catillus): рѣжущій киль, задняя площадка крутая, число реберъ на передней лишь изрѣдка болѣе 16. Изогнутая макушка приподнята надъ замкомъ (425 ств.).

III. Группа Crassum (D. crassa, Baeri): тупой киль, задняя площадка крутая, число реберъ на передней обыкновенно не бываетъ менѣе 16. Изогнутая макушка приподнята надъ замкомъ (98 ств.).

Измѣреніями опредѣлены были вышина, длина раковинъ и выпуклость створки. Въ таблицахъ даны абсолютныя величины этихъ измѣреній, при этомъ удвоенная величина выпуклости створки названа толщиною раковины. Я буду ее называть здѣсь вздутостью раковины. Рядомъ съ абсолютными величинами показаны относительныя, гдѣ величина вышины принята за единицу. Эти относительныя величины раздѣлены на классы съ разностью въ 0,05 какъ относительной длины, такъ и относительной вздутости. Комбинаціи соотвѣтственныхъ классовъ названы категоріями.

Классы, или классовые варіанты, какъ мы ихъ можемъ назвать, представлены слѣдовательно указателями относительной вздутости и относительной длины раковины къ ея вышинѣ, принятой за единицу. Для болѣе удобнаго оперированія съ числами я взялъ здѣсь за единицу вышины 20 mm.

Тѣ результаты вычисленій, которые даны здѣсь въ миллиметрахъ, легко переводятся на показанія въ процентахъ вышины умноженіемъ на 5, или на показанія въ единицѣ вышины дѣленіемъ на 20.

Въ діаграммахъ на стр. 42 (Поѣздка на Каспій) данъ подсчетъ частоты классовъ въ каждой комбинаціи. Мнѣ оставалось только сложить соотвѣтственныя величины, что бы получить частоту всего класса для каждаго изъ нихъ.

Изъ всѣхъ трехъ группъ лишь группа catillus при графическомъ изображеніи частоты классовъ какъ вздутости, такъ и длины даетъ одновершинныя кривыя. Это обстоятельство дало мнѣ поводъ вычислить теоретическое распредѣленіе частоты для группы Catillus.

На нижеприведенной таблицы III классы (въ миллиметрахъ) и частота ихъ помѣщены во вторыхъ отъ края рядахъ таблицы. Классы вздутости и частота ихъ отмѣчены: V_v и $\Sigma(f_v)$, классы длины и частота ихъ отмѣчены: V_l и $\Sigma(f_l)$.

Разсмотримъ сначала вздутость. Вычисленіе даетъ [1]) слѣдующія величины.

гр. Catillus. Вздутость.

$$\nu_1=0{,}10112;\ \nu_2=2{,}4472;\ \nu_3=1{,}4764;\ \nu_4=21{,}00.$$

$$A=12{,}611\pm0{,}046\ \text{mm.}\ \ \sigma=1{,}456\pm0{,}033\ \text{mm.}\ \ C=11{,}54\pm0{,}26$$

$$\mu_2=2{,}60364;\ \mu_3=0{,}73605;\ \mu_4=23{,}05629.$$

$\beta_1=1{,}01753$; $\beta_2=2{,}71406$; $F=-0{,}62447$. Такъ какъ $F<0$ и $\beta_1>0$, то мы имѣемъ слѣдовательно типъ I. Необходимыя величины для вычисленія теоретической частоты классовъ получаются слѣдующія:

[1]) По Davenport. Statistical Methods with special reference to biological variation. New-York. 1904. Относительно формулъ, по которымъ производились вычисленія, см. въ концѣ статьи «Приложеніе».

$$s=16{,}30039;\ \alpha=0{,}08471\pm0{,}0392;\ D=0{,}12336\pm0{,}1571.$$

$$l=12{,}2425;\ l_1=5{,}11582;\ l_2=7{,}12668.$$

$$m_1=5{,}97586;\ m_2=8{,}3248.$$

$y_0=116{,}827$ при $A-D=12{,}4878$ mm.; $x=V-(A-D)$, гдѣ V есть величина класса въ миллиметрахъ.

$$\lg y=\lg 116{,}827+N\{\lg\lg[1+N(\lg x-\lg 5{,}11582)]+\lg 5{,}97586\}+$$
$$+N\{\lg\lg[1-N(\lg x-\lg 7{,}12668)]+\lg 8{,}3248\}.$$

Сопоставленіе теоретической частоты (y) съ частотой (f) полученной изъ таблицъ измѣреній позволяетъ составить слѣдующую таблицу:

ТАБЛИЦА I.

Сопоставленіе эмпирической и теоретической частоты классовъ вздутости раковинъ въ группѣ Catillus.

V	f	y	y—f	$(y-f)^2:y$
9	2	3,4	+1,4	0,576
10	29	26,4	—2.6	0,256
11	74	73,0	—1,0	0,014
12	106	111,4	+5,4	0,262
13	115	113,0	—2,0	0,035
14	73	73,0	0,0	0,000
15	37	34,1	—2,9	0,247
16	7	9,4	+2,4	0,613
17	2	1,3	—0,7	0,377
	Σ 445	445,0	+9,2 —9,2	$2{,}38=\chi^2$

Такъ какъ число классовъ $n'=9$, то $P=0,96$ [1]) т. е. вѣроятность теоретической частоты классовъ очень высокая.

Не столь высокую, но все же удовлетворительную вѣроятность теоретической частоты классовъ получаемъ по отношенію длины раковины, какъ это видно изъ нижеизложеннаго.

гр. Catillus. Длина.

$\nu_1=-0,38876$; $\nu_2=2,27191$; $\nu_3=-2,07416$; $\nu_4=13,24719$.
$A=28,101\pm0,049$ mm. $\sigma=1,561\pm0,035$ mm. $C=5,55\pm0,13$.

$\mu_2=2,28744$; $\mu_3=0,45799$; $\mu_4=14,20092$.

$\beta_1=0,030696$; $\beta_2=3,40117$; $F=0,71025$. Такъ какъ $F>0$ и <1; $\beta_1>0$; $\beta_2>3$, то мы имѣемъ типъ IV. Необходимыя величины для вычисленія теоретической частоты классовъ получаются слѣдующія:

$s=20,025$; $\alpha=0,07169\pm0,039$; $D=0,1119\pm0,495$.

$m=11,0125$; $mD=1,2323$.

$\lg l=0,82586$: $\lg\tau=0,56649$

$y_0=87,114$ при $A-mD=26,8688$ mm.; $x=V-(A-mD)=$
$=l\tan g\vartheta$.

$\lg y=\lg 87,114+N[\lg 22,025+\lg\lg\cos\vartheta]\mp N[\overline{3},879661+\lg\vartheta^0$
$+0,56649]$.

Сопоставляя теоретическую частоту (y) съ наблюденной (f) получаемъ слѣдующую таблицу:

ТАБЛИЦА II.

Сопоставленіе эмпирической и теоретической частоты классовъ длины раковинъ въ группѣ Catillus.

V	f	y	y—f	$(y-f)^2$:y
22	0	0,1	—0,1	0,100
23	0	0,5	—0,5	0,500

[1]) По Elderton. Tables for testing the goodness of fit of theory to observation. Biometrica. Vol. 1. 1901—1902.

V	f	y	y—f	$(y-f)^2:y$
24	5	3,1	+1,9	1,164
25	14	14,0	0,0	0
26	43	45,2	—2,2	0,107
27	87	92,0	—5,0	0,271
28	129	118,4	+10,6	0,948
29	98	94,0	+4,0	0,170
30	36	50,0	—14,0	3,920
31	25	19,2	+5,8	1,752
32	6	6,0	0,0	0
33	1	2,0	—1,0	0,500
34	1	0,5	+0,5	0,500
	Σ 445	445,0	—22,8	$9,932=\chi^2$
			+22,8	

такъ какъ число классовъ $n'=13$, то $P=0,62$.

Какъ въ отношеніи вздутости, такъ и въ отношеніи длины кривыя ихъ эмпирическая и теоретическая весьма близко подходятъ другъ къ другу, не смотря на то, что мы имѣемъ дѣло съ комплекснымъ статистическимъ типомъ. Въ указанныхъ отношеніяхъ группа Catillus обнаруживаетъ свойство единаго фенотипа [1]).

Цѣль, съ какою были предприняты ряды измѣреній, заключалась главнымъ образомъ въ томъ, что бы установить соотношеніе между пластическими признаками раковинъ въ разныхъ группахъ. Слѣдовательно намъ необходимо разсмотрѣть корреляцію между вздутостью и длиной раковинъ. Комбинація этихъ величинъ была дана раньше въ діаграммѣ (Поѣздка на Каспій, стр. 42). Ее остается только приспособить къ нашимъ вычисленіямъ.

---

[1]) Cp. Iohannsen. Elemente der exakten Erblichkeitslehre 1909.

ТАБЛИЦА III.

Комбинація частоты классовъ длины (l) и вздутости (v) раковинъ въ группѣ Catillus.

$V_l - V_0$	V_l											
	$V_v - V_0$	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4		
	V_v	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\Sigma(f_l)$	M_v
−4	24		1	1		3					5	12
−3	25			2	8	2	2				14	12.3
−2	26		5	3	12	10	9	4			43	12,6
−1	27	1	1	13	18	31	17	5	1		87	12,8
0	28		7	25	33	23	22	13	4	2	129	12,6
1	29	1	10	14	22	30	15	5	1		98	12,4
2	30		3	9	9	8	2	5			36	12,7
3	31			5	4	8	5	3			25	12,9
4	32		2	1				2	1		6	12,8
5	33						1				1	14
6	34			1							1	11
	$\Sigma(f_v)$	2	29	74	106	115	73	37	7	2	445	
	M_l	28	28,3	28,4	28,2	28	27,9	28,5	28,6	28		

Таблица составлена такимъ способомъ, что всѣ средніе ряды, за исключеніемъ обоихъ крайнихъ на каждой изъ четырехъ сторонъ таблицы, обозначаютъ: вертикальные—частоту классовъ вздутости (f_v) соотвѣтственно каждому классу длины (V_l), горизонтальные—частоту классовъ длины (f_l) соотвѣтственно каждому классу вздутости (V_v). Предпослѣдній рядъ справа и снизу даетъ сумму соотвѣтственной частоты, а послѣдній рядъ справа (M_v) и снизу (M_l) показываетъ эмпирическій средній классовый варіантъ соотвѣтствующій данному, по формуламъ:

$$M_l = \frac{\Sigma(V_l f_v)}{\Sigma(f_v)} \quad \text{и} \quad M_v = \frac{\Sigma(V_v f_l)}{\Sigma(f_l)}.$$

Для нахожденія коэффиціента корреляціи имѣемъ: $A_v=12,611$; $A_l=28,101$; $\sigma_v=1,456$; $\sigma_l=1,561$; затѣмъ вычисляемъ:

$$\frac{\Sigma([V_l-V_0]\ [V_v-V_0]f)}{n}=-0,04791;$$

$$-\nu_{1l}=0,899;\ -\nu_{1v}=0,389.$$

Изъ этихъ данныхъ получаемъ коэффиціентъ корреляціи $r=-0,175\pm0,036$, который оказывается отрицательнымъ и очень слабымъ. Затѣмъ опредѣляемъ коэффиціентъ регрессіи длины по отношенію вздутости:

$$\varrho_l=-0,187=\mathrm{tang}(-10^{\circ}38')$$

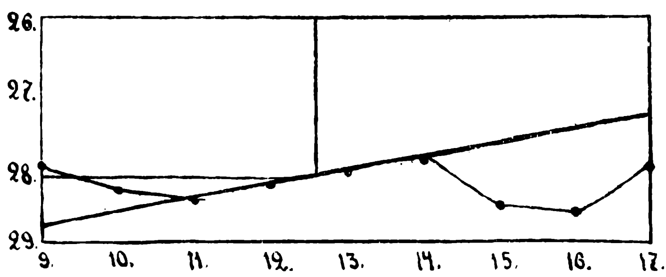
и коэффиціентъ регрессіи вздутости по отношенію длины:

$$\varrho_v=-0,163=\mathrm{tang}(-9^{\circ}16').$$

Теперь мы можемъ сдѣлать графическое сопоставленіе регрессіонной линіи съ данными наблюденія, какъ это показано на фигурахъ 1-ой и 2-ой.

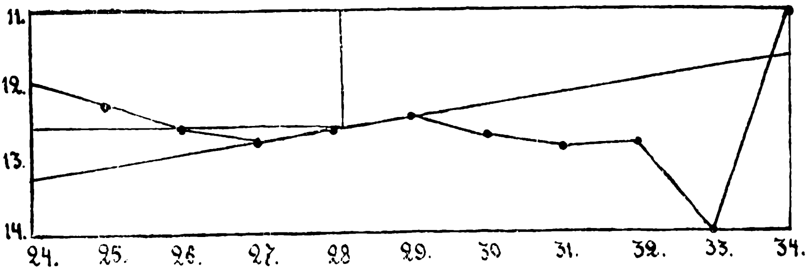
Фиг. 1-ая

гр. Catillus. Линія регрессіи длины (—tang 10°38′).



Фиг. 2-ая

гр. Catillus. Линія регрессіи вздутости (—tang $9^0 16'$).



Линія регрессіи проводится какъ тангенсъ опредѣленнаго угла, или, что еще проще, по формулѣ, опредѣляющей средніе теоретическіе варіанты соотвѣтствующіе даннымъ, т. е.:

$$x_l = \varrho_l V_v - \varrho_l A_v + A_l$$

$$x_v = \varrho_v V_l - \varrho_v A_l + A_v,$$

гдѣ x_l и x_v средніе теоретическіе варіанты длины и вздутости по отношенію къ даннымъ V_v и V_l. На фигурахъ ломаной линіей опредѣляется положеніе среднихъ эмпирическихъ варіантовъ M_l и M_v.

Что намъ даетъ вычисленіе коеффиціентовъ регрессій? Прежде всего мы можемъ сказать, что 1) на каждый миллиметръ увеличенія вздутости длина раковины въ среднемъ уменьшается на 0,187 mm. (ϱ_l) и 2) на каждый миллиметръ увеличенія длины вздутость раковины уменьшается на 0,163(ϱ_v). Фигуры первая и вторая показываютъ, что эти выводы вполнѣ справедливы для среднихъ варіантовъ: для четырехъ въ регрессіи длины и для трехъ въ регрессіи вздутости. Эти 12 комбинацій на таблицѣ III заключены въ рамку, какъ центральная часть группы Catillus.

Напротивъ того, для краевыхъ варіантовъ мы видимъ рѣзкое расхожденіе регрессіонной линіи и эмпирической, что можетъ быть объяснено не только недостаточностью статистическаго матеріала, но и его неоднородностью. Неоднородность группы Catillus обнаруживается, какъ увидимъ ниже, и на распредѣленіи числа реберъ.

Переходимъ теперь къ группѣ trigonoides. Такъ какъ здѣсь распредѣленіе частоты длины и вздутости (см. табл. IV) указываетъ на двухвершинныя кривыя, то я и не дѣлаю попытку опредѣлить теоретическую частоту. Остановимся на болѣе существенной сторонѣ дѣла, установимъ корреляцію между вздутостью и длиной раковины. Въ нижеслѣдующей таблицѣ IV классы вздутости и длины и ихъ частота расположены въ томъ же порядкѣ, какъ и на табл. III.

Прежде всего опредѣлимъ среднюю арифметическую, показатель измѣнчивости и коеффиціентъ измѣнчивости:

$A_v = 14{,}04 \pm 0{,}059$ mm. $\quad A_l = 26{,}642 \pm 0{,}084$ mm.
$\sigma_v = 1{,}826 \pm 0{,}042$ mm. $\quad \sigma_l = 2{,}572 \pm 0{,}059$ mm.
$C_v = 13{,}01 \pm 0{,}30\%$ $\quad C_l = 9{,}65 \pm 0{,}22\%$.

ТАБЛИЦА IV.

Комбинація частоты классовъ длины (l) и вздутости (v) раковинъ въ группѣ trigonoides

	$V_v - V_0$	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7		
	V_v	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	$\Sigma(f_l)$	M_v
$V_l - V_0$	V_l													
−4	21				1	1		2					4	15,7
−3	22		1			6	2	2	3	2			16	16,2
−2	23				2	13	12	5	1				33	15,7
−1	24		2	3	4	12	9	6	1			1	38	15,4
0	25	1	1	10	12	20	10	7	1		1		63	14,9
1	26	1	4	7	18	12	6	7					55	14,5
2	27	1	12	14	11	6	8		1				53	13,5
3	28	7	16	14	5	3	3		1				49	13,9
4	29	5	24	12	8	4	1	1					55	12,8
5	30	2	13	13	6								34	12,7
6	31	3	2	5	1								11	12,4
7	32	2	4	4		1							11	12,4
8	33		1			1							2	13,5
9	34			1									1	13
$\Sigma(f_v)$		22	80	83	68	79	51	30	8	2	1	1	425	
M_l		28,9	28,3	28,1	26,6	25,1	24,9	24,4	24,1	22	25	24		

Затѣмъ вычисляемъ:

$$\frac{\Sigma([V_l - V_0]\ [V_v - V_0]f)}{n} = -2{,}75294$$

имѣемъ;— $\nu_{1l} = 0{,}558$ и $-\nu_{1v} = 0{,}96$.

Отсюда получаемъ коэффиціентъ корреляціи $r = -0{,}644 \pm 0{,}019$, который также съ отрицательнымъ знакомъ, но значительно выше, чѣмъ въ группѣ Catillus.

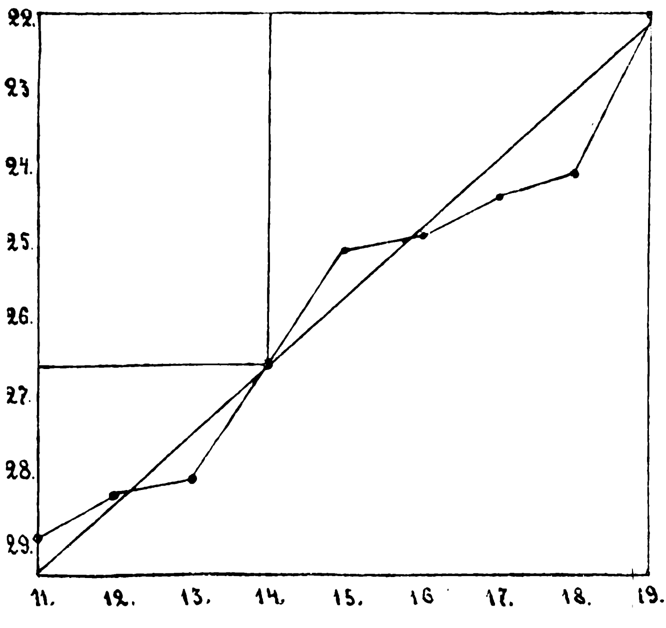
Соотвѣтственно этому получаются и болѣе высокіе коэффиціенты регрессіи длины и вздутости:

$$\varrho_l = -0{,}908 = \mathrm{tang}(-42^{\circ}14') \text{ и } \varrho_v = -0{,}467 = \mathrm{tang}(-24^{\circ}34').$$

На нижеслѣдующихъ фигурахъ 3-ей и 4-ой сдѣлано графическое сопоставленіе регрессіонныхъ линій съ данными наблюденія.

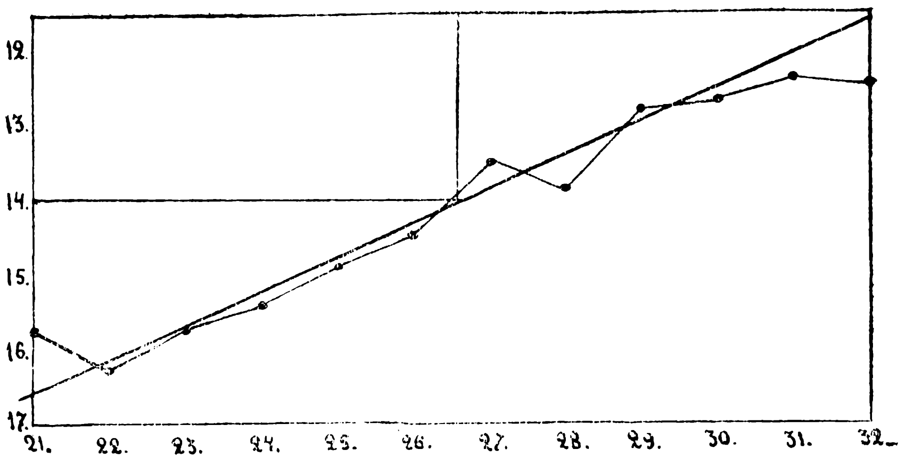
Фиг. 3-ья

гр. Trigonoides. Линія регрессіи длины (—tang $42^{\circ}14'$)



Фиг. 4-ая

гр. Trigonoides. Линія регрессіи вздутости (—tang 24°34′)



На этихъ фигурахъ крайніе плюсъ варіанты (20, 21 вздутости и 33, 34 длины), какъ рѣзко уклоняющіеся по незначительности ихъ частоты, не помѣщены. Линіи регрессіи означаютъ: 1) на каждый миллиметръ увеличенія вздутости длина раковины въ среднемъ уменьшается на 0,908 mm., 2) на каждый миллиметръ увеличенія длины вздутость раковины уменьшается на 0,457 mm. Сравнивая линіи регрессіи съ эмпирическими данными, обозначенными на фигурахъ ломаными линіями, мы не находимъ въ нихъ того совпаденія въ среднихъ варіантахъ, какое наблюдалось нами въ группѣ Catillus. Вмѣсто того по всей линіи происходитъ, вообще говоря, съ увеличеніемъ одного признака уменьшеніе другого, за исключеніемъ крайнихъ, помѣщенныхъ на фигурѣ, варіантовъ длины (21 и 32) и еще за однимъ исключеніемъ, на которомъ слѣдуетъ остановиться. Бросается въ глаза очень характерная особенность: нарушеніе корреляціи между двумя срединными варіантами—между 27 и 28 въ регрессіи вздутости и между 15 и 16 въ регрессіи длины. На табл. IV я обозначилъ это явленіе чертами проведенными между указанными варіантами. Надо замѣтить, что полученный такимъ образомъ лѣвый нижній квадрантъ таблицы преимущественно слагается изъ особаго мелкаго вида D. trigonoides-catillus, которому я предложилъ бы другое названіе—Didacna Roseni, что бы устранить двойственность въ названіи вида.

Это плоскія и длинныя раковины, какъ показываетъ ихъ положеніе въ комбинаціонной табл. IV. Образецъ этого вида изображенъ въ моей „Поѣздкѣ на Каспій" на табл. II подъ буквой D. Очень возможно, что присутствіе въ группѣ именно этого вида, по своимъ относительнымъ размѣрамъ примыкающаго къ группѣ Catillus, преимущественно производить тотъ эффектъ, что получаются двувершинныя кривыя частоты, а также только что указанныя нарушенія въ срединной части линіи регрессіи. Въ силу этого здѣсь комплексный статистическій типъ обнаруживаетъ присутствіе двухъ фенотиповъ.

Незначительное число экземпляровъ (98) въ группѣ Crassum заранѣе не обѣщаетъ результатовъ, которые можно было бы широко использовать. Тѣмъ не менѣе я произвелъ вычисленіе существенныхъ элементовъ въ параллель вычисленіямъ, произведеннымъ для предшествующихъ группъ. Матеріалъ для этого вычисленія даетъ нижеслѣдующая таблица V, составъ которой отличается отъ таблицъ III и IV тѣмъ, что здѣсь не показаны среднія эмпирическія величины. Онѣ совершенно излишни, какъ мы сейчасъ увидимъ.

ТАБЛИЦА V.

Комбинація частоты классовъ длины (l) и вздутости (v) раковинъ въ группѣ crassum.

	V_v-V_o	−2	−1	0	1	2	3	4	
	V_v	13	14	15	16	17	18	19	$\Sigma\ (f_l)$
$V_l\ V_o$	V_l								
−4	21					1			1
−3	22	1		1	1				3
−2	23	1	1	3	5				10
−1	24	1	6	11	3	1			22
0	25		3	11	5	2		1	22
1	26	2	4	4	5	1	1		17
2	27	1		2	7	7			17
3	28				1	4			5
4	29								0
5	30				1				1
	$\Sigma\ (f_v)$	6	14	32	28	16	1	1	98

Получаемъ:

$$A_v=15{,}418\pm0{,}137\quad \sigma_v=2{,}016\pm0{,}097\quad C_v=13{,}07\pm0{,}63$$
$$A_l=25{,}163\pm0{,}110\quad \sigma_l=1{,}615\pm0{,}078\quad C_l=\ 6{,}42\pm0{,}31$$

$$\frac{\Sigma([V_l-V_o][V_v-V_o]f)}{n}=0{,}67347;-\nu_{1l}=0{,}8367;-\nu_{1v}=0{,}5816.$$

$$r=0{,}057\pm0{,}068;\ \varrho_l=0{,}046=\operatorname{tang}\ 2^0\ 38';\quad \varrho_v=0{,}072=$$
$$=\operatorname{tang}\ 4^0\ 6'.$$

Получается коеффиціентъ корреляціи съ положительнымъ знакомъ и совершенно ничтожный. При этомъ такъ какъ онъ меньше своей вѣроятной ошибки, то практически его можно считать равнымъ нулю. Можно сказать, что здѣсь существуетъ независимое варьированіе длины и вздутости раковины.

Такой результатъ вычисленія гармонируетъ съ тѣмъ обстоятельствомъ, что въ этой группѣ средняя величина вздутости бо́льшая и средняя величина длины ме́ньшая, чѣмъ въ двухъ предшествовавшихъ группахъ т. е. здѣсь мы имѣемъ дѣло съ болѣе вздутыми и болѣе короткими раковинами, слѣдовательно съ такими классами, которые находятся преимущественно внѣ среднихъ классовъ группы Catillus (ср. табл. III) въ сторону + вздутости и въ сторону—длины. Въ этомъ отношеніи группа crassum составляетъ діаметральную противоположность виду Didacna Roseni.

Изъ таблицъ измѣреній барона Розена можно утилизировать съ біометрическими цѣлями еще число реберъ на передней площадкѣ раковинъ во всѣхъ трехъ группахъ дидакнидъ. На нижеслѣдующей таблицѣ VI я сдѣлалъ сопоставленіе этихъ чиселъ съ ихъ частотой.

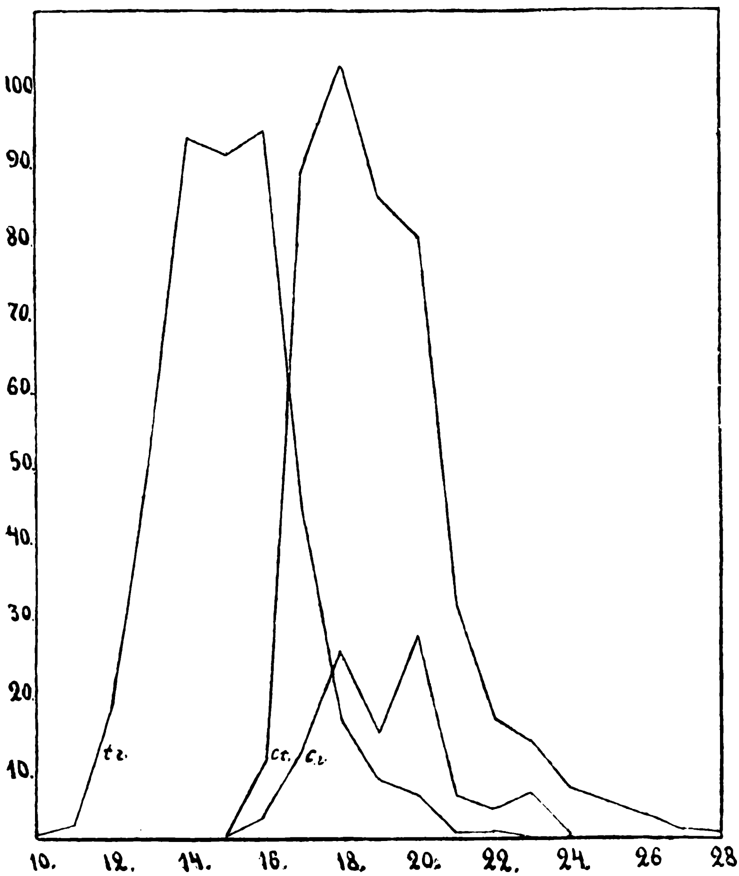
Что бы сдѣлать болѣе нагляднымъ распредѣленіе варіантовъ во всѣхъ трехъ группахъ, я дополняю эту таблицу графическимъ изображеніемъ этого распредѣленія на фиг. 5.

ТАБЛИЦА VI.

	Число реберъ:	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	Сумма.
Частота въ группахъ:	Catillus . . .					1		10	89	103	85	80	31	16	13	7	5	3	1		1	445
	Trigonoides .	1	2	18	50	93	91	94	43	16	8	6	1	1		1						425
	Crassum . .					1		3	12	25	14	27	6	4	6							98
	Сумма . . .	1	2	18	50	95	91	107	144	144	107	113	38	21	19	8	5	3	1		1	968

ФИГУРА 5-я.

Распредѣленіе частоты варіантовъ числа реберъ въ трехъ группахъ дидакнидъ (tr., ct. и cr.).



Здѣсь разнохарактерный составъ группъ trigonoides и crassum обнаруживается наглядно дву и трехъ вершинными кривыми частоты, а въ группѣ catillus ступеньчатой кривой. Если же вывести кривую частоты для совокупности всѣхъ трехъ группъ (968 раковинъ), то получается многовершинная кривая. Такъ какъ средній варіантъ для совокупности дидакнидъ оказывается между 17 и 18, то сопоставляя распредѣленіе частоты во всѣхъ трехъ группахъ, мы видимъ, что въ группѣ trigonoides преобладаютъ minus варіанты, а въ группахъ catillus и crassum — plus варіанты. На кривыхъ распредѣленія видно, что среди этихъ варіантовъ могутъ быть разсматриваемы какъ фенотипы четные варіанты: 14, 16, 18, 20 и лишь одинъ изъ крайнихъ plus варіантовъ съ такимъ свойствомъ оказывается нечетный варіантъ: 23.

Вычисленіе, не давая никакихъ указаній на фенотипы, указываетъ въ точныхъ математическихъ терминахъ среднія величины и измѣнчивость. Вотъ эти указанія:

		A_c	σ_c	C_c
Число реберъ.	гр. Catillus	19,067 ± 0,066	2,008 ± 0,045	10,53 ± 0,24
	гр: Trigonoides	15,122 ± 0,058	1,788 ± 0,041	11,83 ± 0,27
	гр. Crassum	19,122 ± 0,121	1,769 ± 0,085	9,25 ± 0,44
	Didacnidae	17,444 ± 0,060	2,651 ± 0,041	15,21 ± 0,23

Отмѣтимъ, что въ группѣ Crassum, гдѣ встрѣчаемъ величину средняго варіанта наибольшую, оказывается коеффиціентъ измѣнчивости наименьшій. Наибольшимъ коеффиціентомъ измѣнчивости по числу реберъ обладаетъ совокупность всѣхъ трехъ группъ дидакнидъ.

Обращаясь снова къ пластическимъ признакамъ вздутости и длины, я сопоставляю показанія относительно нихъ съ показаніями относящимися къ совокупности дидакнидъ. Я не составляю комбинаціонной таблицы для дидакнидъ, такъ какъ ее легко получить сложеніемъ изъ элементовъ таблицъ III, IV и V.

Я беру показанія для средней арифметической, показателя измѣнчивости и коеффинціента измѣнчивости сначала вздутости, затѣмъ длины, наконецъ показанія для коеффиціента корреляціи и для коеффиціентовъ регрессіи длины и вздутости. Все это для всѣхъ трехъ группъ и для совокупности дидакнидъ.

		A_v	σ_v	C_v
Вздутость.	гр. Catillus	12,611±0,046	1,456±0,033	11,54±0,26
	гр. Trigonoides	14,04 ±0,059	1,826±0,042	13,01±0,30
	гр. Crassum	15,418±0,137	2,016±0,097	13,07±0,63
	Didacnidae	13,528±0,040	1,856±0,028	13,71±0,21

		A_l	σ_l	C_l
Длина.	гр. Catillus	28,101±0,049	1,561±0,035	5,55 ±0,13
	гр. Trigonoides	26,642±0,084	2,572±0,059	9,65 ±0,22
	гр. Crassum	25,163±0,110	1,615±0,078	6,42 ±0,31
	Didacnidae	27,205±0,051	2,263±0,035	8,32 ±0,13

		r	ϱ_l	ϱ_v
Корреляція.	гр. Catillus	−0,175±0,031	−0,187=−tg 10°38′	−0,163=−tg 9°16′
	гр. Trigonoides	−0,644±0,019	−0,908=−tg 42°14′	−0,457=−tg 24°34′
	гр. Crassum	+0,057±0,068	+0,046=+tg 2°38′	+0,072=+tg 4° 6′
	Didacnidae	−0,712±0,011	−0,868=−tg 40°58′	−0,584=−tg 30°17′

Здѣсь мы видимъ, что коеффиціентъ измѣнчивости не во всѣхъ случаяхъ большій у Дидакнидъ, такъ коеф. изм. длины въ группѣ trigonoides больше чѣмъ въ совокупности всѣхъ трехъ группъ. Замѣтимъ, что въ группѣ Catillus средняя величина вздутости наименьшая и средняя величина длины наибольшая, а между тѣмъ оба коеффиціента измѣнчивости самые малые по сравненію съ остальными.

Что касается корреляціи, то не смотря на то, что ея коеффиціентъ наибольшій у дидакнидъ, въ группѣ trigonoides коеффиціентъ регрессіи длины больше, чѣмъ у дидакнидъ. Это стоитъ въ связи съ большей измѣнчивостью длины trigonoides.

Такъ какъ у всѣхъ, за исключеніемъ Crassum, показатель измѣнчивости длины больше показателя измѣнчивости вздутости, то у нихъ регрессія длины больше регрессіи вздутости. При независимомъ варьированіи этихъ признаковъ въ группѣ Crassum однако можно констатировать обратное отношеніе регрессій другъ къ другу. И въ группѣ Crassum мы въ дѣйствительности встрѣчаемъ наибольшій показатель измѣнчивости вздутости.

Связь между различными элементами вычисленія понятна сама собою, если принять во вниманіе формулы, по которымъ они вычисляются.

Въ заключеніе сдѣлаемъ сводку тѣхъ положеній, какія можно вывести, какъ результатъ работы.

1) Изъ всѣхъ трехъ группъ группа Catillus отличается наибольшимъ числомъ видовъ входящихъ въ ея составъ (catillus, protracta, Barbot-de Marni, longipes), однако по пластическимъ признакамъ (высота, длина, вздутость) эта группа обнаруживаетъ свойство единаго фенотипа. Лишь ступеньчатая кривая распредѣленія числа реберъ въ группѣ Catillus указываетъ на существованіе нѣсколькихъ фенотиповъ.

2) Группы trigonoides и crassum по пластическимъ признакамъ и по числу реберъ наглядно слагаются изъ нѣсколькихъ фенотиповъ.

3) Коеффиціентъ корреляціи вздутости и длины въ группахъ Catillus и trigonoides отрицательный, при этомъ въ первой группѣ онъ слабый, а во второй выше-средній. Коеффиціентъ регрессіи длины въ обѣихъ группахъ больше коеффиціента регрессіи вздутости.

4) Варьированіе вздутости и длины въ группѣ Crassum почти независимое. Однако можно сказать, что коеффиціентъ регрессіи длины меньше коеффиціента регрессіи вздутости.

5) Въ группѣ Catillus для четырехъ срединныхъ варіантовъ вздутости (11, 12, 13, 14) и для трехъ срединныхъ варіантовъ длины (27, 28, 29) наблюдается полное совпаденіе линіи регрессіи длины и вздутости съ эмпирическими величинами. Получается центръ группы состоящій изъ 12 комбинацій.

6) При двухвершинныхъ кривыхъ частоты въ линіяхъ регрессіи наблюдаются эмпирически соотвѣтственныя нарушенія корреляціи (группа trigonoides). Это положеніе можетъ имѣть значеніе общаго характера.

7) Всѣ три группы по отношенію другъ къ другу и по отношенію къ совокупности дидакнидъ отличаются слѣдующими крайними коэффиціентами и показателями измѣнчивости:

Didacnidae. Наибольшій показатель и коэффиціентъ измѣнчивости числа реберъ. Наибольшій коэффиціентъ измѣнчивости вздутости. Наибольшій коэффиціентъ корреляціи. Наибольшій коэффиціентъ регрессіи вздутости.

Catillus. Наименьшій показатель и коэффиціентъ измѣнчивости вздутости. Наименьшій коэффиціентъ измѣнчивости длины.

Trigonoides. Наибольшій показатель и коэффиціентъ измѣнчивости длины. Наибольшій коэффиціентъ регрессіи длины.

Crassum. Наименьшій показатель и коэффиціентъ измѣнчивости числа реберъ. Наибольшій показатель измѣнчивости вздутости. Наименьшій показатель измѣнчивости длины.

Заканчивая изслѣдованіе, я долженъ сказать нѣсколько словъ о способѣ измѣренія барона Розена по сравненію со способомъ употребленнымъ Bateson'омъ по отношенію къ Cardium edule (On some variation of Cardium edule apparently correlated to the conditions of life. Philosophical Transactions of the roy. Soc. of London (B) vol. 180. И abstract въ Proceedings of the Royal Society of London. Vol. XLVI. 1889). Въ измѣреніяхъ барона Розена мы имѣемъ двѣ взаимно перпендикулярныя линіи между параллельными касательными къ крайнимъ точкамъ длины и вышины раковины, при чемъ употреблялся особый приборъ, изображенный въ „Поѣздкѣ на Каспій“ (стр. 10). Bateson бралъ для опредѣленія вышины (онъ ее называетъ шириной) перпендикуляръ къ линіи наибольшей длины, проведенный отъ условной точки — заднiй зубъ правой створки и соотвѣтсвенное углубленiе лѣвой. Величину вздутости раковины Bateson совершенно не принималъ во вниманiе. Особенность его метода заключается еще въ томъ, что онъ бралъ отношенiе длины къ вышинѣ (ширинѣ), а не наоборотъ, и затѣмъ имъ былъ опредѣленъ вѣсъ нѣсколькихъ раковинъ.

---

30 Дек.
1911 г.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Формулы, по которымъ производились вычисленія.

Классы или варіанты обозначаются буквой V. Максимальный по частотѣ или нулевой классъ обозначается V_o. Сумма всѣхъ измѣренныхъ экземпляровъ—n.

Первый, второй, третій и четвертый моменты кривой по отношенію къ нулевому классу опредѣляются:

$$\nu_1 = \frac{\Sigma\ ([V - V_0]\, f)}{n} \quad \nu_2 = \frac{\Sigma([V - V_0]^2\, f)}{n} \quad \nu_3 = \frac{\Sigma([V - V_0]^3 f)}{n}$$

$$\nu_4 = \frac{\Sigma([V - V_0]^4 f)}{n}$$

Средняя арифметическая величина классовъ $A = \frac{\Sigma(V.f)}{n}$ $= V_0 + \nu_1$

Показатель измѣнчивости $\sigma = \sqrt{\nu_2 - \nu_1^2}$. Коеффиціентъ измѣнчивости $C = \frac{\sigma}{A} 100$.

О вѣроятныхъ ошибкахъ этихъ трехъ величинъ вмѣстѣ съ другими см. въ концѣ приложенія.

Второй, третій и четвертый моменты по отношенію къ среднему арифметическому классу (первый равенъ нулю) опредѣляются:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 \left(+ \frac{1}{6} \right) *); \quad \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1 \nu_2 + 2\nu_1^3;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\ \nu_3 + 6\nu_1^2 \nu_2 - 3\nu_1^4 \left(+ \mu_2 - \frac{1}{10} \right). *)$$

---

*) Выраженія въ скобкахъ отбрасываются, если имѣются не классовые варіанты, а варіанты цѣлыхъ чиселъ (напр. число лучей, зубцовъ и т. п.).

Отношенія этихъ моментовъ:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^{\,2}}{\mu_2^{\,3}}\ ;\ \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}}.$$

Критическая функція $F = 2\beta_2 - 3\beta_1 - 6$, по ней опредѣляется типъ кривой.

Важная вспомогательная константа:

$$s = \frac{6(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{+\sqrt{F^2}}$$

Показатель ассимметричности кривой:

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1} \cdot \frac{\beta_2 + 3}{5\beta_2 - 6\beta_1 - 9} \cdot \frac{\mu_3}{+\sqrt{\mu_3^{\,2}}}$$

Разстояніе на абсциссѣ между арифметической средней и модальной точкой (Mo), соотвѣтствующей основанію ординаты, проведенной отъ вершины теоретической кривой, опредѣляется: $D = \sigma.\ \alpha$.

Въ случаѣ типа I эта ордината (максимальная теоретическая) берется исходной ординатой (y_o) и ея положеніе на абсциссѣ слѣдовательно будетъ $A - D$ т. е. какъ разъ модальная точка (Mo).

Приближенная формула исходной ординаты въ типѣ I пишется такъ:

$$y_o = \frac{n}{l} \cdot \frac{(m_1 + m_2 + 1)\ \sqrt{m_1 + m_2}}{\sqrt{2\pi m_1 m_2}} \cdot e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m_1 + m_2} - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)}.$$

Здѣсь вся длина абсциссы $l = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\beta_1 (s+2)^2 + 16(s+1)}.$

У Davenport'a употребляются нѣсколько иныя выраженія, но отъ этого окончательный результатъ существенно не мѣняется. Ср. Dunker. Die Methode der Variationsstatistik. Archiv für Entwickelungsmechanik der Organismen. 8. Bd. 1899.

Части ея по одну и по другую сторону отъ модальной точки:

$$l_1=\frac{l-Ds}{2};\ l_2=\frac{l+Ds}{2}$$

Затѣмъ: $m_1=\frac{l_1}{l}(s-2)$; $m_2=\frac{l_2}{l}(s-2)$, слѣдовательно $m_1+m_2=s-2$.

$e=2{,}71828$ (основанiе неперовской системы логарифмовъ).

Величина ординатъ (y) соотвѣтствующихъ различнымъ классамъ опредѣляется по формулѣ:

$$y=y_o\left(1+\frac{x}{l_1}\right)^{m_1}\left(1-\frac{x}{l_2}\right)^{m_2}$$

Подставляя различныя значенiя x, по формулѣ $x=V-(A-D)$, соотвѣтственныя разнымъ классамъ (V), мы получаемъ соотвѣтственныя ординаты (y) или теоретическую частоту этихъ классовъ.

Что касается кривой типа IV, самой обыкновенной изъ бiологическихъ ассиметричныхъ кривыхъ, то здѣсь исходная ордината (y_o) не совпадаетъ ни съ средней, ни съ максимальной, но находится въ точкѣ $A-mD$.

Здѣсь $l=\frac{\sigma}{4}\sqrt{16(s-1)-\beta_1(s-2)^2}$; $m=\frac{s+2}{2}$;

$$mD=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\beta_1}\cdot\frac{\beta_2+3}{2\beta_2-3\beta_1-6}\cdot\frac{\mu_3}{+\sqrt{\mu_3{}^2}}.$$

Приближенная формула исходной ординаты въ типѣ IV пишется такъ:

$$y_o=\frac{n}{l}\cdot\sqrt{\frac{s}{2\pi}}\cdot\frac{e^{\frac{(\cos\varphi)^2}{3s}-\frac{1}{12s}-\tau\varphi}}{(\cos\varphi)^{s+1}},$$

гдѣ φ равняется углу, котораго тангенсъ есть $\frac{\tau}{s}$, а

$$\tau = \frac{\sigma . s(s-2)\sqrt{\beta_1}}{4l} \cdot \frac{\mu_3}{-\sqrt{\mu_3^2}}.$$

Величина ординатъ (y) соотвѣтствующихъ различнымъ классамъ опредѣляется по формулѣ:

$$y = y_o (cos\vartheta)^{2m} . \ e^{-\tau\vartheta},$$

гдѣ перемѣнная ϑ опредѣляется формулой $x = V - (A - mD) = l tang \vartheta$.

(При логарифмированіи $log \ \vartheta^o$ опредѣляется въ градусахъ и доляхъ градуса).

Коеффиціентъ корреляціи:

$$r = \left[\frac{\Sigma([V_l - V_o] \ [V_v - V_o] \ f)}{n} - \nu_{1l} . \ \nu_{1v} \right] . \ \frac{1}{\sigma_l \sigma_v}$$

т. е. суммируются произведенія уклоненій классовъ вздутости и длины отъ ихъ нулевого класса (классъ эмпирической максимальной частоты) на ихъ частоту, результатъ дѣлится на сумму всего количества экземпляровъ. Такъ какъ $A = V_o + \nu_1$, то $V - A = V - V_o - \nu_1$, поэтому для приведенія полученнаго выраженія къ среднимъ арифметичесскимъ числамъ длины и вздутости необходимо изъ него вычесть произведеніе первыхъ моментовъ ихъ кривыхъ въ отношеніи нулевого класса, взятыхъ съ отрицательнымъ знакомъ, т. е. $(-\nu_{1l})$ $(-\nu_{1v})$. При этомъ, если ν_1 имѣетъ положительный знакъ, то берется дополнительное до 1 число (ν_1 правильная дробь, если вѣрно взятъ нулевой варіантъ V_o). Послѣ этого разность дѣлится на произведеніе показателей измѣнчивости.

Коеффиціентъ регрессіи получается по формулѣ:

$$\varrho_v = r\frac{\sigma_v}{\sigma_l} \text{ и } \varrho_l = r\frac{\sigma_l}{\sigma_v}.$$

Формулы для опредѣленія вѣроятной ошибки (E) наиболѣе важныхъ элементовъ исчисленія.

Замѣтимъ, что факторъ $T=0{,}67449$ и $lg\ T=\bar{1}{,}828976$.

$$E_A=\pm T\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\quad E_\sigma=\pm T\frac{\sigma}{\sqrt{2n}};\quad E_C=\pm T\frac{C}{\sqrt{2n}}\,^{*)};$$

$$E_\alpha=\pm T\sqrt{\frac{3}{2n}};$$

$$E_D=\pm T\sqrt{\frac{3}{2n}}\cdot\sigma;\quad E_r=\pm\frac{T(1-r^2)}{\sqrt{n}}.$$

Замѣтимъ, что шансы, что истинная величина заключается въ указываемыхъ предѣлахъ, будутъ:

Предѣлы:	Шансы:	Предѣлы:	Шансы:
$\pm 2E$	4,5 : 1	$\pm 6E$	19200 : 1
$\pm 3E$	21 : 1	$\pm 7E$	420000 : 1
$\pm 4E$	142: 1	$\pm 8F$	17000000 : 1
$\pm 5E$	1310 : 1	$\pm 9E$	Приблизит. билліонъ:1.

---

*) Въ томъ случаѣ, если C не болѣе 10—15% и если ограничиться двумя десятичн. знаками. Въ противн. случаѣ $E_C=\pm T\frac{C}{\sqrt{2n}}\left[1+2\left(\frac{C}{100}\right)^2\right]^{1/2}$.